2元3次形式の概均質ゼータ関数に関する大野予想の証明 (概均質ベクトル空間の研究)

中川, 仁

数理解析研究所講究録 1238 巻 2001 年 158-173

2元3次形式の概均質ゼータ関数に関する大野予想の証明

上越教育大学　中川 仁 (Jin Nakagawa)
Joetsu University of Education

1 いくつかの予備知識の復習

1.1 類体論

k を有限次代数体とする. $\mathcal{O}_k$, D_k, E_k によって, それぞれ k の整数環, 判別式, 単数群を表す. I_k によって, k の分数イデアル全体のなす乗法群, P_k によって, 単項分数イデアル全体のなす I_k の部分群を表し, $Cl_k = I_k/P_k$ を k のイデアル類群とする.

k の整イデアル $\mathfrak{c}$ に対して, $I_k(\mathfrak{c})$ によって, $\mathfrak{c}$ と素な分数イデアルのなす群を表し,

$$P_k(\mathfrak{c}) = \{(\alpha) \in I_k(\mathfrak{c}) \mid \alpha \equiv 1 \pmod{^* \mathfrak{c}}\}$$

とおく. $Cl_k(\mathfrak{c}) = I_k(\mathfrak{c})/P_k(\mathfrak{c})$ を k の mod $\mathfrak{c}$ の **ray class group** という.

L/k を無限素点が不分岐であるような有限次アーベル拡大とすれば, 適当な $\mathfrak{c}$ に対して, L はある部分群 $H \subset Cl_k(\mathfrak{c})$ に対応する類体である. すなわち, $\mathfrak{c}$ と素な k の 1 次の素イデアル $\mathfrak{p}$ は, そのイデアル類 $[\mathfrak{p}]$ が H に属する場合, その場合に限って, L/k で完全分解する. そのとき, アルティン写像

$$\mathfrak{a} \longmapsto \left(\frac{L/k}{\mathfrak{a}}\right)$$

によって, $Cl_k(\mathfrak{c})/H \cong Gal(L/k)$ である. そのような $\mathfrak{c}$ で最小 (包含関係で最大) のものを L/k の導手という. k の素イデアル $\mathfrak{p}$ は導手 $\mathfrak{c}$ を割り切るとき, そのときに限り L/k で分岐する.

k を 2 次体とする. $\mathcal{O}_{k,c}$ によって, k の導手 c の整環を表す. $\mathcal{O}_{k,c} = \mathbb{Z} + c\mathcal{O}_k$ である.

$$P_{\mathbb{Z}}(c) = \{(\alpha) \in I_k(c) \mid \alpha \equiv a \pmod{c\mathcal{O}_k} \text{ for some } a \in \mathbb{Z}, (a, c) = 1\}$$

とおく. k の格子 $\mathfrak{a}$ が **proper** $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアルであるとは,

$$\mathcal{O}_{k,c} = \{\lambda \in k \mid \lambda\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}\}$$

を満たすことである．$I_{k,c}$ によって，proper $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアル全体のなす乗法群を表し，$P_{k,c}$ によって，単項 $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアル全体のなす $I_{k,c}$ の部分群を表す．商群 $Cl_{k,c} = I_{k,c}/P_{k,c}$ を整環 $\mathcal{O}_{k,c}$ のイデアル類群と呼ぶ．そのとき，

$$1 \longrightarrow P_{\mathbb{Z}}(c)/P_k(c) \longrightarrow Cl_k(c) \longrightarrow Cl_{k,c} \longrightarrow 1$$

は完全系列である．$E_{k,c} = \mathcal{O}_{k,c}^{\times}$ から $(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^{\times}$ への自然な準同型の像を $\bar{E}_{k,c}$ とすれば，

$$P_{\mathbb{Z}}(c)/P_k(c) \cong (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^{\times}/\bar{E}_{k,c}$$

である．ℓ を奇素数とする．$A_k(c)$，$B_k(c)$, $C_k(c)$ によって，$Cl_k(c)$, $(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^{\times}/\bar{E}_{k,c}$, $Cl_{k,c}$ のシロー ℓ-部分群を表せば，完全系列

$$1 \longrightarrow B_k(c) \longrightarrow A_k(c) \longrightarrow C_k(c) \longrightarrow 1$$

を得る．これは $Gal(k/\mathbb{Q})$-加群の完全系列であり，$B_k^-(c) = 1$, $C_k^+(c) = 1$ であるから，$A_k^-(c) \cong C_k(c)$ を得る．ここで，

$$A_k^{\pm}(c) = \{a \in A_k(c) \,|\, a^{\sigma} = a^{\pm 1}\}, \quad Gal(k/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle,$$

であり，$B_k^{\pm}(c)$, $C_k^{\pm}(c)$ も同様に定義される．

D_ℓ によって位数 2ℓ の二面体群を表す．$K/\mathbb{Q}$ を ℓ 次拡大で，K の $\mathbb{Q}$ 上の normal closure を $\tilde{K}$ とするとき，$Gal(\tilde{K}/\mathbb{Q}) \cong D_\ell$ であるようなものとする．k を $\tilde{K}$ に含まれる唯一の 2 次体とする．$\tilde{K}/k$ は無限素点が不分岐であるような ℓ 次巡回拡大であるから，その導手を $\mathfrak{c}$ とすれば，$\tilde{K}$ は $Cl_k(\mathfrak{c})$ の指数 ℓ のある部分群に対応する．よって，$\tilde{K}$ は指数 ℓ の部分群 $H \subset A_k(\mathfrak{c})$ に対応する．$\tilde{K}/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であるから，$\mathfrak{c}$, H は $Gal(k/\mathbb{Q})$ の作用で不変である．もっと詳しく，自然数 c が存在して，$\mathfrak{c} = (c)$ が成り立つ．さらに，$Gal(\tilde{K}/\mathbb{Q}) \cong D_\ell$ より，H は $A_k^-(c)$ の指数 ℓ の部分群と対応する．また，$D_K = D_k^{\frac{\ell-1}{2}} c^{\ell-1}$ が成り立つことが知られている．

ℓ 次体 K で，$Gal(\tilde{K}/\mathbb{Q}) \cong D_\ell$, $D_K = D_k^{\frac{\ell-1}{2}} c^{\ell-1}$ となるものの (同型類の) 集合を $\mathcal{K}_{k,c}$ で表すとき，上述のことをまとめると，

補題 1.1. $\cup_{d|c}\mathcal{K}_{k,d}$ は $Cl_{k,c}$ の指数 ℓ の部分群と 1 対 1 に対応する．したがって，

$$\sum_{d|c} |\mathcal{K}_{k,d}| = \frac{1}{\ell - 1}\left[(Cl_{k,c} : Cl_{k,c}^{\ell}) - 1\right].$$

$Cl_{k,c}^{(\ell)} = \{a \in Cl_{k,c} \,|\, a^{\ell} = 1\}$ とおくと，$(Cl_{k,c} : Cl_{k,c}^{\ell}) = |Cl_{k,c}^{(\ell)}|$ であるから，補題 1.1 の等式は，

$$\sum_{d|c} |\mathcal{K}_{k,d}| = \frac{1}{\ell - 1}\left(|Cl_{k,c}^{(\ell)}| - 1\right)$$

となる．したがって，$\mu(x)$ をメビウス関数とすれば，メビウスの反転公式より，

$$|\mathcal{K}_{k,c}| = \frac{1}{\ell-1}\sum_{d|c}\mu\left(\frac{c}{d}\right)\left(|Cl_{k,d}^{(\ell)}|-1\right) \tag{1.1}$$

を得る．

後の応用のために，$Cl_{k,c}$ のある部分群を導入する．χ を 2 次体 k に対応する mod $|D_k|$ の Dirichlet 指標とする．$\chi(p)=1$ であることと，k において p が $p=\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ と分解することは同値である．f を c と素な平方因数を持たない自然数とする．$H_{k,c}(f)$ によって，$N(\mathfrak{p})|f$ を満たす素イデアル $\mathfrak{p}$ のイデアル類たちと $Cl_{k,c}^{\ell}$ とによって生成される $Cl_{k,c}$ の部分群を表す．また，$\chi(p)=1$ を満たす f の素因数 p がすべて完全分解するような $K\in\mathcal{K}_{k,c}$ のなす集合を $\mathcal{K}_{k,c}(f)$ で表す．そのとき，類体論によって，$H_{k,c}(f)$ を含むような $Cl_{k,c}$ の指数 ℓ の部分群の集合は，$\cup_{d|c}\mathcal{K}_{k,d}(f)$ と 1 対 1 に対応する．ゆえに，

$$\sum_{d|c}|\mathcal{K}_{k,d}(f)| = \frac{1}{\ell-1}(|Cl_{k,c}/H_{k,c}(f)|-1)$$

となる．$X_{k,c}(f)=H_{k,c}(f)/Cl_{k,c}^{\ell}$ とおけば，

$$|Cl_{k,c}/H_{k,c}(f)| = \frac{(Cl_{k,c}:Cl_{k,c}^{\ell})}{(H_{k,c}(f):Cl_{k,c}^{\ell})} = \frac{|Cl_{k,c}^{(\ell)}|}{|X_{k,c}(f)|}.$$

したがって，メビウスの反転公式より，

$$|\mathcal{K}_{k,c}(f)| = \frac{1}{\ell-1}\sum_{d|c}\mu\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{|Cl_{k,d}^{(\ell)}|}{|X_{k,d}(f)|}-1\right) \tag{1.2}$$

を得る．

以上述べたことを $\ell=3$ として，後で用いる．さらに，次のことも用いる．

補題 1.2. $K/\mathbb{Q}$ を非ガロア 3 次体とし，$\tilde{K}$ を K の $\mathbb{Q}$ 上の *normal closure*，k を $\tilde{K}$ に含まれる唯一の 2 次体とする．そのとき，

$$D_K = D_kc^2,\quad c=3^e c_0,\ 0\le e\le 2,$$

c_0 は平方因数を持たない 3 と素な自然数であり，$3\nmid D_k$ ならば $e=0,2$ である．

1.2 2元2次形式

整数係数の 2 元 2 次形式と 2 次体の整環のイデアル類群との関係に関する基本的な事項を復習する．

$$F(u,v) = au^2+buv+bv^2 \quad (a,b,c\in\mathbb{Z}, a>0) \tag{1.3}$$

を整数係数の既約な2元2次形式で，判別式 $D(F) = b^2 - 4ac$ が負であるものとする．$(a, b, c) = 1$ のとき，F は原始的であるという．$\gamma \in \Gamma = SL(2)_{\mathbb{Z}}$ の作用を，$(\gamma F)(u, v) = F((u, v)\gamma)$ によって定義する．そのとき，$D(\gamma F) = D(F)$ である．二つの形式 F_1, F_2 に対して，$\gamma \in \Gamma$ が存在して，$F_2 = \gamma F_1$ となるとき，F_1 と F_2 は同値であるという．F は原始的であるとする．$D(F) < 0$ より，$k = \mathbb{Q}\left(\sqrt{D(F)}\right)$ は虚2次体である．判別式 $D(F) = D_k m^2$, m は自然数，の形である．

$$\mathfrak{a} = [a, \alpha] = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}\alpha, \quad \alpha = \frac{-b + \sqrt{D(F)}}{2} \tag{1.4}$$

とおく．ここで，$\sqrt{D(F)} = i\sqrt{|D(F)|}$, $\sqrt{|D(F)|} > 0$ とする．そのとき，$\mathbb{Z}[\alpha] = \mathcal{O}_{k,m}$ であり，$\mathfrak{a}$ は proper $\mathcal{O}_{k,m}$-イデアルである．さらに，$\mathfrak{a}$ は原始的である．すなわち，$r \in \mathbb{Z}$, $r > 1$ で $r^{-1}\mathfrak{a}$ が整イデアルであるようなものは存在しない．次のことはよく知られている．

補題 1.3. 写像 $F \longmapsto \mathfrak{a}$ は判別式 $D_k m^2$ の整数係数の原始的2元2次形式の同値類の集合から，整環 $\mathcal{O}_{k,m}$ のイデアル類群 $Cl_{k,m}$ の上への全単射を引き起こす．

1.3　2元3次形式

$x(u, v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3$ を $\mathbb{Q}$ 上既約な整数係数2元3次形式とする．$\gamma \in \Gamma$ の作用を，$(\gamma x)(u, v) = x((u, v)\gamma)$ によって定義する．x の判別式 $D(x)$ は

$$D(x) = 18x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 - 4x_2^3x_4 - 27x_1^2x_4^2$$

によって定義される．そのとき，$D(\gamma x) = D(x)$ である．二つの形式 x, y に対して，$\gamma \in \Gamma$ が存在して，$y = \gamma x$ となるとき，x と y は同値であるという．

$x(u, v)$ を $\mathbb{Q}$ 上既約とし，θ を3次方程式

$$x(u, 1) = x_1u^3 + x_2u^2 + x_3u + x_4 = 0$$

の根とする．$K_x = \mathbb{Q}(\theta)$ とおく．$\eta_0 = 1$, $\eta_1 = x_1\theta$, $\eta_2 = x_1\theta^2 + x_2\theta + x_3$ とおき，η_0, η_1, η_2 によって生成される3次体 K_x の格子を $\mathcal{O}_x$ とする．そのとき，

$$\begin{cases} \eta_1^2 &= -x_1x_3 - x_2\eta_1 + x_1\eta_2, \\ \eta_2^2 &= -x_2x_4 - x_4\eta_1 + x_3\eta_2, \\ \eta_1\eta_2 &= -x_1x_4 \end{cases} \tag{1.5}$$

が成り立つ．よって，$\mathcal{O}_x$ は K_x の整環である．次に，x は $\mathbb{Q}$ 上可約な整数係数2元3次形式で，$D(x) \neq 0$ とする．もし，x が $\mathbb{Q}$ 上で1次式と既約2次式の積に分解されるならば，$K_x = \mathbb{Q} \oplus k$, k は x の2次因子の分解体とする．もし，x が $\mathbb{Q}$ 上で1次式の3個の積に分解されるならば，$K_x = \mathbb{Q}^3$ とおく．そのとき，$\{\eta_0 = 1, \eta_1, \eta_2\}$

を基底とする自由 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathcal{O}_x$ は (1.5) によって，K_x の整環になる．逆に，階数 3 の自由 $\mathbb{Z}$-加群であるような，単位元 1 を持つ結合的可換環は，ある整数係数 2 元 3 次形式 x に対する $\mathcal{O}_x$ に同型である．さらに，$D(\mathcal{O}_x) = D(x)$ である．次の補題は Delone and Faddeev [2] による．

補題 1.4. 写像 $x \longmapsto \mathcal{O}_x$ は 0 でない判別式を持つ整数係数 2 元 3 次形式 x の $GL(2)_{\mathbb{Z}}$-同値類の集合から，階数 3 の自由 $\mathbb{Z}$-加群であるような，単位元 1 を持つ結合的可換環の同型類の集合の上への全単射を引き起こす．

K_i $(i = 1, \ldots, m)$ を有限次代数体とし，$A = \oplus_{i=1}^m K_i$ とおく．そのとき，$\mathcal{O}_A = \oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{K_i}$ は A の極大整環である．

$$\zeta_A(s) = \prod_{i=1}^m \zeta_{K_i}(s)$$

とおく．さらに，

$$\eta_A(s) = \sum_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}_A : \mathcal{O})^{-s}$$

とおく．ここで，$\mathcal{O}$ は A のすべての整環をわたる．各素数 p に対して，$A_p = A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ とおく．そのとき，$\mathcal{O}_{A_p} = \mathcal{O}_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ は A_p の極大整環である．$\eta_A(s)$ はオイラー積を持ち，

$$\eta_A(s) = \prod_p \eta_{A_p}(s), \quad \eta_{A_p}(s) = \sum_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}_{A_p} : \mathcal{O})^{-s}, \tag{1.6}$$

が成り立つ．ここで，$\mathcal{O}$ は A_p のすべての整環をわたる．

補題 1.5. K を 3 次体，k を 2 次体とし，A を K, $\mathbb{Q} \oplus k$, $\mathbb{Q}^3$ のいずれかとすれば，

$$\eta_A(s) = \frac{\zeta_A(s)}{\zeta_A(2s)} \zeta(2s)\zeta(3s-1)$$

が成り立つ．

補題 1.5 の等式を書き直そう．素数 p のべきに対して，

$$S(p^n) = \begin{cases} \sum_{0 \le l \le n/3} p^l, & n \ge 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

とおく．p の A における分解のタイプ ν に応じて，整数 α_ν, β_ν を次のように定義する (例えば，分解のタイプが 111 とは完全分解すること，タイプが 12 とは 1 次と 2 次の素イデアルに分解することである)．

$$\begin{cases} \alpha_{111} = 2, & \beta_{111} = 1, \\ \alpha_{12} = 0, & \beta_{12} = 1, \\ \alpha_{3} = -1, & \beta_{3} = 1, \\ \alpha_{11^2} = 1, & \beta_{11^2} = 0, \\ \alpha_{1^3} = 0, & \beta_{1^3} = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

さらに，

$$b_\nu(p^n) = S(p^n) + \alpha_\nu S(p^{n-1}) + \beta_\nu S(p^{n-2}) \tag{1.8}$$

とおく．そのとき，

補題 1.6. 素数 p の A における分解のタイプが ν ならば，

$$\eta_{A_p}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_\nu(p^n)}{p^{ns}}.$$

2　大野予想の紹介

V を 2 元 3 次形式の空間，$G = GL(2)$ とすると，(G, V) は概均質ベクトル空間である．判別式 $D(x)$ は (G, V) の基本相対不変式である．L によって，整数係数の 2 次形式全体のなす格子を表し，

$$\hat{L} = \{x(u,v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3 \in L \mid x_2, x_3 \in 3\mathbb{Z}\}$$

とおく．L, $\hat{L}$ は Γ-不変であり，$\hat{L}$ は V 上のある $SL(2)$-不変な非退化交代形式に関する L の双対格子である．$n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ に対して，

$$\begin{aligned} L(n) &= \{x \in L \mid D(x) = n\}, \\ \hat{L}(n) &= \{x \in \hat{L} \mid D(x) = n\} \end{aligned}$$

とおき，2 元 3 次形式の類数 $h(n)$, $\hat{h}(n)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} h(n) &= \#\left(\Gamma \backslash L(n)\right), \\ \hat{h}(n) &= \#\left(\Gamma \backslash \hat{L}(n)\right). \end{aligned}$$

19 世紀の中頃に，Eisenstein, Arndt, Hermite によって，これらの類数の有限性が示され，$\hat{h}(27n)$ の表が計算された．さらに，20 世紀の初めに，Mathew–Berwick によって，$h(n)$ の表が計算された．

$x \in V$ に対して，Γ_x によって，Γ における x の固定部分群を表す．そのとき，

$$|\Gamma_x| = \begin{cases} 1 \text{ または } 3 & D(x) > 0, \\ 1, & D(x) < 0 \end{cases}$$

が成り立つ．2 元 3 次形式の類数 $h_1(n)$, $h_2(n)$ をこれに応じて，

$$\begin{aligned} h_1(n) &= \#\left(\Gamma \backslash \{x \in L(n) \mid |\Gamma_x| = 1\}\right), \\ h_2(n) &= \#\left(\Gamma \backslash \{x \in L(n) \mid |\Gamma_x| = 3\}\right) \end{aligned}$$

と定義する．$\hat{h}_1(n)$, $\hat{h}_2(n)$ も同様に定義する．これらの類数を用いて，新谷卓郎氏は 1972 年の論文で次のような 4 つの Dirichlet 級数を導入した．

$$
\begin{aligned}
\xi_1(L,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_1(n)+3^{-1}h_2(n)}{n^s}, \quad \xi_2(L,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(-n)}{n^s}, \\
\xi_1(\hat{L},s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{h}_1(n)+3^{-1}\hat{h}_2(n)}{n^s}, \quad \xi_2(\hat{L},s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(-n)}{n^s}.
\end{aligned}
$$

彼は，これらの級数が $\Re s > 1$ で絶対収束し，$s = 1, \frac{5}{6}$ で一位の極を持つ以外は正則であるような全複素平面上の有理型関数に解析接続されることを証明した．さらに，次の関数等式を満たすことも証明した．

$$
\begin{aligned}
\text{(2.1)} \quad \begin{pmatrix} \xi_1(L,1-s) \\ \xi_2(L,1-s) \end{pmatrix} &= \Gamma\Big(s-\frac{1}{6}\Big)\Gamma(s)^2\Gamma\Big(s+\frac{1}{6}\Big)2^{-1}3^{6s-2}\pi^{-4s} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s & \sin \pi s \\ 3\sin \pi s & \sin 2\pi s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(\hat{L},s) \\ \xi_2(\hat{L},s) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ によって，それぞれ非ガロア 3 次体 (の同型類) 全体の集合，ガロア 3 次体全体の集合を表す．さらに，$\mathcal{K}_1^+ = \{K \in \mathcal{K}_1 | D_K > 0\}$, $\mathcal{K}_1^- = \{K \in \mathcal{K}_1 | D_K < 0\}$ とおく．また，$\mathcal{Q}^+$, $\mathcal{Q}^-$ によって，それぞれ実 2 次体全体の集合，虚 2 次体全体の集合を表す．補題 1.4 より，Datskovsky–Wright [1] の一つの結果は次のように解釈される．

補題 2.1. $\xi_i(s,L)$ $(i=1,2)$ は次のように表示される:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\xi_1(L,s) &= \sum_{K\in\mathcal{K}_1^+} |D_K|^{-s}\eta_K(2s) + \frac{1}{3}\sum_{K\in\mathcal{K}_2} |D_K|^{-s}\eta_K(2s) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{Q}^+} |D_k|^{-s}\eta_{\mathbf{Q}\oplus k}(2s) + \frac{1}{6}\eta_{\mathbf{Q}^3}(2s), \\
\frac{1}{2}\xi_2(L,s) &= \sum_{K\in\mathcal{K}_1^-} |D_K|^{-s}\eta_K(2s) + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{Q}^-} |D_k|^{-s}\eta_{\mathbf{Q}\oplus k}(2s).
\end{aligned}
$$

大野泰生氏は 1995 年に，係数の数値計算に基づいて，これらの 4 つの Dirichlet 級数の間には次のような簡単な関係があるという予想を提出した．

予想 2.2.

$$
\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \xi_1(\hat{L},s) &= 3^{-3s}\xi_2(L,s), \\
\text{(ii)} \quad \xi_2(\hat{L},s) &= 3^{1-3s}\xi_1(L,s).
\end{aligned}
$$

これは，類数の間の等式として表せば，次の主張と同値である．

予想 **2.3.**

$$\text{(i)} \quad \hat{h}_1(27n) + \frac{1}{3}\hat{h}_2(27n) = h(-n) \quad \forall n > 0;$$
$$\text{(ii)} \quad \hat{h}(-27n) = 3h_1(n) + h_2(n) \quad \forall n > 0.$$

さらに，大野氏は関数等式 (2.1) から，予想の (i) と (ii) は同値であることを導くと同時に，Datskovsky–Wright による関数等式の対角化を用いて，予想から次のような，より簡単な形の関数等式が導かれることを示した．

$$Z_{\pm}(1-s) = Z_{\pm}(s). \tag{2.2}$$

ここで，

$$Z_{\pm}(s) = 2^s 3^{\frac{3}{2}s}\pi^{-2s}\Gamma(s)\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\mp\frac{1}{6}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\mp\frac{1}{3}\Big)\Big(3^{\frac{1}{2}}\xi_1(L,s)\pm\xi_2(L,s)\Big).$$

注意 **2.4.** $Z_-(s)$ は $s=1$ で一位の極，$Z_+(s)$ は $s=1,\frac{5}{6}$ で一位の極を持つ以外は正則である．

筆者は [3] において，予想 2.3 の (i) を証明することによって，この予想を解決した．以下，証明の概略を解説する．

3　大野予想の証明

$\tilde{h}(27n) = \hat{h}_1(27n) + \frac{1}{3}\hat{h}_2(27n)$ とおく．$\tilde{h}(27n) = h(-n), \forall n > 0$ を証明すればよい．$k = \mathbb{Q}(\sqrt{-n})$ とおけば，k は虚 2 次体であり，$n = |D_k|m^2, m \in \mathbb{N}$ の形である．

$m=1$ の場合，m が平方因数を持たない場合，一般の場合の 3 段階に分けて証明する．

3.1　$m=1$ の場合

n を正整数とする．$x(u,v)$ を $\hat{L}(27n)$ に属する整数係数 2 元 3 次形式とし，これを

$$x(u,v) = x_1u^3 + 3x_2u^2v + 3x_3uv^2 + x_4v^3, \quad x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{Z}$$

とかく．x の Hessian H_x を次の式で定義する．

$$H_x(u,v) = -\frac{1}{36}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} \end{vmatrix}. \tag{3.1}$$

そのとき，$H_x(u,v)=Au^2+Buv+Cv^2$,

$$A=x_2^2-x_1x_3,\quad B=x_2x_3-x_1x_4,\quad C=x_3^2-x_2x_4 \tag{3.2}$$

である．H_x は正定値 2 元 2 次形式であり，その判別式は $-n$ に等しいことがわかる．さらに，

$$H_{\gamma x}(u,v)=(\gamma H_x)(u,v),\quad \forall\gamma\in\Gamma$$

が成り立つ．H_x は原始的とは限らないので，$f=(A,B,C)$ とおき，

$$A=fA_1,\ B=fB_1,\ C=fC_1,\quad A_1,B_1,C_1\in\mathbb{Z}$$

とかく．そのとき，ある自然数 c に対して，$B_1^2-4A_1C_1=D_kc^2$ となる．よって，$-n=D(H_x)=D_kc^2f^2$, $m=cf$ である．

$$\alpha_x=\frac{-B_1+c\sqrt{D_k}}{2},\quad \mathfrak{a}_x=[A_1,\alpha_x]$$

とおく．そのとき，$\mathbb{Z}[\alpha_x]=\mathcal{O}_{k,c}$ であり，$\mathfrak{a}_x$ は原始的 2 元 2 次形式 $f^{-1}H_x$ に対応した proper $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアルであり，$N(\mathfrak{a}_x)=A_1$ である．次の補題は重要である．

補題 3.1. $\beta_x=x_2A_1+x_1\alpha_x$ とおき，$\mathfrak{b}_x=\beta_x\mathfrak{a}_x^{-3}$ とおく．そのとき，$\mathfrak{b}_x$ は整 *proper* $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアルであり，$N(\mathfrak{b}_x)=f$ である．

[証明]　添字 x を省略する．α は 2 次方程式 $u^2+B_1u+A_1C_1=0$ の根であるから，

$$N_{k/\mathbb{Q}}\beta=A_1^2x_2^2-A_1B_1x_2x_1+A_1C_1x_1^2=\frac{A_1}{f}H_x(x_2,-x_1).$$

したがって，(3.2) より，

$$N_{k/\mathbb{Q}}\beta=\frac{A_1}{f}(x_2^2-x_1x_3)^2=fA_1^3 \tag{3.3}$$

を得る．$\mathfrak{b}=\beta\mathfrak{a}^{-3}$ は proper $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアルであり，$N(\mathfrak{a})=A_1$ であるから，(3.3) より，$N(\mathfrak{b})=f$ である．$\mathfrak{b}$ が整 $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアルであることを示そう．$f\mathfrak{a}^3$ は $\mathbb{Z}$ 上 fA_1^3, $fA_1^2\alpha$, $fA_1\alpha^2$, $f\alpha^3$ によって生成される k の部分加群である．簡単な計算によって，次の等式を得る．

$$\left\{\begin{array}{rcl} -fA_1^3 &=& \beta(x_1\alpha+x_1B_1-x_2A_1),\\ fA_1^2\alpha &=& \beta(x_2\alpha+x_1C_1),\\ -fA_1\alpha^2 &=& \beta(x_3\alpha+x_2C_1),\\ f\alpha^3 &=& \beta(x_4\alpha+x_3C_1).\end{array}\right. \tag{3.4}$$

これから，$f\mathfrak{a}^3\subset\beta\mathcal{O}_{k,c}$ を得る．$(\mathcal{O}_{k,c}:\beta\mathcal{O}_{k,c})=N_{k/\mathbb{Q}}\beta=fA_1^3$, $(\mathcal{O}_{k,c}:f\mathfrak{a}^3)=N(f\mathfrak{a}^3)=f^2A_1^3$ であるから，$(\beta\mathcal{O}_{k,c}:f\mathfrak{a}^3)=f$ を得る．したがって，$f\beta\mathcal{O}_{k,c}\subset f\mathfrak{a}^3$, $\mathfrak{b}=\beta\mathfrak{a}^{-3}\subset\mathcal{O}_{k,c}$ を得る．　□

特に，$m=1$ の場合は，$c=f=1$ であるから，補題 3.1 より，$\mathfrak{a}_x^3=(\beta_x)$ であり，イデアル類 $[\mathfrak{a}_x]$ は $Cl_k^{(3)}$ の元である．$H_{\gamma x}=\gamma H_x$ であるから，補題 1.3 より，$[\mathfrak{a}_x]$ は Γx のみで定まる．$k\neq\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ならば，この対応 $\Gamma x\longmapsto[\mathfrak{a}_x]$ は $\Gamma\backslash L(27|D_k|)$ から $Cl_k^{(3)}$ の上への全単射を与える（このことは，もう少し一般的に，m が平方因数を持たない場合に後で証明する）．したがって，$\hat{h}(27|D_k|)=|Cl_k^{(3)}|$ である．一方，補題 2.1 より，

$$h(D_k)=2\#\{K\in\mathcal{K}_1^-\,|\,D_K=D_k\}+1=2|\mathcal{K}_{k,1}|+1.$$

この右辺は，$\ell=3,\ c=1$ に対する等式 (1.1) から，$|Cl_k^{(3)}|$ に等しい．以上のことを図示すれば，次のようになる．

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma\backslash\{\text{判別式 } D_k \text{ の 2 元 2 次形式}\} & \longleftrightarrow & Cl_k \\ & & \cup & & \cup \\ \Gamma\backslash L(27|D_k|) & \longleftrightarrow & \Gamma\backslash\{H_x|\,x\in\hat{L}(27n)\} & \longleftrightarrow & Cl_k^{(3)} \end{array}$$

3.2 m が平方因数を持たない場合

補題 3.2. $\mathfrak{b}_{\gamma x}=\mathfrak{b}_x,\ \forall\gamma\in\Gamma.$

［証明］ Γ の生成元 $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ についてチェックすればよい． □

$\hat{L}_{k,c}(f)$ によって，$x\in\hat{L}(27|D_k|c^2f^2)$ で，H_x の係数の最大公約数が f であるようなもの全体のなす集合を表す．これは Γ-不変である．そのとき，任意の自然数 m に対して，次の分解を得る．

$$\hat{L}(27|D_k|m^2)=\bigcup_{cf=m}\hat{L}_{k,c}(f)\quad\text{(disjoint)}. \tag{3.5}$$

$\hat{L}_{k,c}(f)$ に属する 2 元 3 次形式の同値類の個数を求めよう．$\omega_{k,c}(f)$ によって，整 proper $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアル $\mathfrak{b}$ で，$N(\mathfrak{b})=f,\ [\mathfrak{b}]\in Cl_{k,c}^3$ を満たすようなもの全体のなす集合を表す．$S_{k,c}(f)$ によって，$(\xi,\mathfrak{b})\in Cl_{k,c}\times\omega_{k,c}(f)$ で，$\xi^3[\mathfrak{b}]=1$ を満たすもの全体のなす集合を表す．各 $\mathfrak{b}\in\omega_{k,c}(f)$ に対して，イデアル類 ξ で，$\xi^3[\mathfrak{b}]=1$ を満たすものが丁度 $|Cl_{k,c}^{(3)}|$ 個存在する．したがって，$|S_{k,c}(f)|=|Cl_{k,c}^{(3)}||\omega_{k,c}(f)|$ である．写像 $\Phi:\hat{L}_{k,c}(f)\longrightarrow S_{k,c}(f)$ を $\Phi(x)=([\mathfrak{a}_x],\mathfrak{b}_x)$ によって定義する．

補題 3.3. 写像 Φ は全射である．

[証明]　$(\xi, \mathfrak{b}) \in S_{k,c}(f)$ とする．$\xi = [\mathfrak{a}]$, $\mathfrak{a}$ は原始的整 proper $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアルとしてよい．

$$\mathfrak{a} = [A_1, \alpha],\ A_1 \in \mathbb{Z}, A_1 > 0,\ \mathcal{O}_{k,c} = \mathbb{Z}[\alpha],\ A_1 | N_{k/\mathbb{Q}}\, \alpha$$

とかける．α の満たす 2 次方程式は

$$\alpha^2 + B_1\alpha + A_1C_1 = 0, \quad B_1, C_1 \in \mathbb{Z} \tag{3.6}$$

の形である．$\mathfrak{a}$ が proper $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアルであることから，$(A_1, B_1, C_1) = 1$ がわかる．$[\mathfrak{a}]^3[\mathfrak{b}] = 1$ より，$\beta \in \mathcal{O}_{k,c}$ が存在して，$\mathfrak{a}^3\mathfrak{b} = \beta\mathcal{O}_{k,c}$ となる．ノルムをとれば，$N_{k/\mathbb{Q}}\beta = fA_1^3$ を得る．$f\mathcal{O}_{k,c} \subset \mathfrak{b}$ より，$f\mathfrak{a}^3 \subset \beta\mathcal{O}_{k,c}$ である．よって，

$$\frac{fA_1^{4-i}(-1)^i\alpha^{i-1}}{\beta} = x_i\alpha + a_i, \quad x_i, a_i \in \mathbb{Z}\ (1 \le i \le 4) \tag{3.7}$$

とかける．(3.6) と (3.7) から，

$$\begin{aligned} x_{i+1}\alpha + a_{i+1} &= \frac{fA_1^{4-i-1}(-1)^{i+1}\alpha^i}{\beta} = -\frac{\alpha}{A_1}\frac{fA_1^{4-i}(-1)^i\alpha^{i-1}}{\beta} \\ &= -\frac{\alpha}{A_1}(x_i\alpha + a_i) \\ &= \frac{x_iB_1 - a_i}{A_1}\alpha + x_iC_1, \end{aligned}$$

したがって，

$$x_{i+1} = \frac{x_iB_1 - a_i}{A_1}, \quad a_{i+1} = x_iC_1, \quad 1 \le i \le 3.$$

これから，次の二つの 1 次方程式を得る．

$$A_1x_3 - B_1x_2 + C_1x_1 = 0, \tag{3.8}$$
$$A_1x_4 - B_1x_3 + C_1x_2 = 0. \tag{3.9}$$

また，(3.7) の両辺のノルムをとれば，次の三つの 2 次方程式を得る．

$$A_1x_2^2 - B_1x_2x_1 + C_1x_1^2 = fA_1^2, \tag{3.10}$$
$$A_1x_3^2 - B_1x_3x_2 + C_1x_2^2 = fA_1C_1, \tag{3.11}$$
$$A_1x_4^2 - B_1x_4x_3 + C_1x_3^2 = fC_1^2. \tag{3.12}$$

(3.8) と (3.10) から，$A_1(x_2^2 - x_1x_3) = fA_1^2$，したがって，$x_2^2 - x_1x_3 = fA_1$ を得る．同様に，(3.9) と (3.12) から，$C_1(x_3^2 - x_2x_4) = fC_1^2$，したがって，$x_3^2 - x_2x_4 = fC_1$ を得る．(3.11) から，$x_2 \neq 0$ または $x_3 \neq 0$ であり，(3.8) と (3.9) から，

$$\begin{aligned} fB_1x_2 &= fA_1x_3 + fC_1x_1 = (x_2^2 - x_1x_3)x_3 + (x_3^2 - x_2x_4)x_1 \\ &= x_2(x_2x_3 - x_1x_4), \\ fB_1x_3 &= fA_1x_4 + fC_1x_2 = (x_2^2 - x_1x_3)x_4 + (x_3^2 - x_2x_4)x_2 \\ &= x_3(x_2x_3 - x_1x_4) \end{aligned}$$

を得る．よって，$x_2x_3 - x_1x_4 = fB_1$ を得る．そこで，

$$x(u,v) = x_1u^3 + 3x_2u^2v + 3x_3uv^2 + x_4v^3$$

とおけば，$H_x(u,v) = fA_1u^2 + fB_1uv + fC_1v^2$, したがって，$x \in \hat{L}_{k,c}(f)$ であり，$\mathfrak{a}_x = \mathfrak{a}$ となる．$N_{k/\mathbb{Q}}\beta = fA_1^3$ より，

$$x_1\alpha + a_1 = -\frac{fA_1^3}{\beta} = -\beta^\sigma,$$

$$\beta = -x_1\alpha^\sigma - a_1 = x_1\alpha + x_1B_1 - a_1 = x_1\alpha + x_2A_1 = \beta_x$$

を得る．よって，$\Phi(x) = ([\mathfrak{a}], \mathfrak{b})$. 以上によって，$\Phi$ が全射であることが示された． □

これで，$\hat{L}_{k,c}(f)$ に属する2元3次形式の同値類の個数をイデアル類群 $\mathcal{O}_{k,c}$ のことばで表示する公式を与える次の命題を証明する準備ができた．

命題 3.4. $D_kc^2 \neq -3$ とする．そのとき，写像 Φ は $\Gamma\backslash\hat{L}_{k,c}(f)$ と $S_{k,c}(f)$ の間の全単射を引き起こす．特に，

$$|\Gamma\backslash\hat{L}_{k,c}(f)| = |Cl_{k,c}^{(3)}||\omega_{k,c}(f)|$$

が成り立つ．

[証明]　$x \in \hat{L}_{k,c}(f)$, $\gamma \in \Gamma$ ならば，, $H_{\gamma x} = \gamma H_x$ である．補題1.3, 3.2より，$[\mathfrak{a}_{\gamma x}] = [\mathfrak{a}_x]$, $\mathfrak{b}_{\gamma x} = \mathfrak{b}_x$，したがって，写像 Φ は $\Gamma\backslash\hat{L}_{k,c}(f)$ から $S_{k,c}(f)$ への写像を引き起こし，それは補題3.3によって全射である．単射を示すために，二つの元 $x, y \in \hat{L}_{k,c}(f)$ をとり，$[\mathfrak{a}_x] = [\mathfrak{a}_y]$, $\mathfrak{b}_x = \mathfrak{b}_y$ とする．補題1.3より，$f^{-1}H_x$ は $f^{-1}H_y$ と同値である．したがって，適当な $\gamma \in \Gamma$ をとって y を γy で置き換えることによって，$f^{-1}H_y = f^{-1}H_x$ としてよい． よって，$\mathfrak{a}_y = \mathfrak{a}_x$ である．そのとき，補題3.2より，$\mathfrak{b}_y$ は変わらず，$\mathfrak{b}_x$ に等しい．よって，$\beta_y\mathcal{O}_{k,c} = \beta_x\mathcal{O}_{k,c}$ を得る．もし，$D_kc^2 \neq -3, -4$ ならば，$E_{k,c} = \{\pm 1\}$ である．よって，$\beta_y = \pm\beta_x$ を得る．そのとき，(3.4) から，$y = \pm x$ がわかる．これは単射性を示している．次に，$D_kc^2 = -4$ であるとする．すなわち，$k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $c = 1$ とする．そのとき，$Cl_{k,1}$ は自明であり，$E_{k,1} = \{\pm 1, \pm i\}$ である．$H_0(u,v) = u^2 + v^2$ とおく．H_0 はイデアル $\mathcal{O}_k$ に対応する．$H_x = H_y = fH_0$ としてよい．そのとき，$x_2^2 - x_1x_3 = f$, $x_2x_3 - x_1x_4 = 0$, $x_3^2 - x_2x_4 = f$ である．これから，$x_1 + x_3 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$ がわかる．同様に，$y_1 + y_3 = 0$, $y_2 + y_4 = 0$ である．$\beta_y = y_2 + y_1 i$, $\beta_x = x_2 + x_1 i$ であるから，条件 $\beta_y = \varepsilon\beta_x$, $\varepsilon = \pm 1, \pm i$ から，$y = \pm x, \mp\gamma_0 x$ を得る．ここで，$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である．これは単射性を示している． □

命題3.4で除外した場合に対しては，次が成り立つ．

命題 3.5. $k=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $c=1$, $f\in\mathbb{Z}$, $f>0$ とする．そのとき，

$$\hat{h}_2(81f^2)=|\Gamma\backslash\hat{L}_{k,1}(f)|=3|Cl_{k,1}^{(3)}||\omega_{k,1}(f)|$$

が成り立つ．

(3.5) と命題 3.4, 3.5 より，次を得る．

命題 3.6. k を虚 2 次体，m を正整数とし，$n=|D_k|m^2$ とおく．そのとき，

$$\tilde{h}(27n)=\sum_{cf=m}|Cl_{k,c}^{(3)}||\omega_{k,c}(f)|$$

が成り立つ．

ここで，m は平方因数を持たないとする．これによって，$m=cf$ のとき，$(c,f)=1$ が保証される．

$$\Omega_{k,c}(f)=\bigcup_{g|f}\omega_{k,c}(g)$$

とおけば，

$$|\omega_{k,c}(f)|=\sum_{g|f}\mu\left(\frac{f}{g}\right)|\Omega_{k,c}(g)|$$

とかける．したがって，命題 3.6 の等式は次のように書き直せる．

$$\tilde{h}(27n)=\sum_{cf=m}\sum_{g|f}\mu\left(\frac{f}{g}\right)|\Omega_{k,c}(g)||Cl_{k,c}^{(3)}|. \tag{3.13}$$

χ を k に対応する Dirichlet 指標とする．$g|f$ とし，$p_i|g$, $i=1,\ldots,t$ を g の素因数で $\chi(p_i)=1$ を満たすものとする．$g_1=p_1\cdots p_t$ とおく．そのとき，$(p_i,c)=1$ に注意すれば，$p_i\mathcal{O}_{k,c}=\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_i'$ である．$H_{k,c}(g)$ を $Cl_{k,c}^3$ と $[\mathfrak{p}_i]$, $i=1,\ldots,t$ によって生成される $Cl_{k,c}$ の部分群とする．準同型

$$\rho:\mathbb{F}_3^t\longrightarrow X_{k,c}(g)=H_{k,c}(g)/Cl_{k,c}^3$$

を

$$\rho(a_1,\ldots,a_t)=\prod_{i=1}^t[\mathfrak{p}_i]^{a_i}\pmod{Cl_{k,c}^3}$$

によって定義する．定義から明らかに ρ は全射である．$\mathfrak{b}$ を整 proper $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアルで $N(\mathfrak{b})|g_1$ を満たすとする．そのとき，

$$\mathfrak{b}=\prod_{i=1}^t\mathfrak{p}_i^{a_i}\mathfrak{p}_i'^{b_i},\quad (a_i,b_i)=(0,0),(1,0),(0,1)$$

とかけるから，$\Omega_{k,c}(g_1)$ は $\ker\rho$ と 1 対 1 に対応する．したがって，

$$|\Omega_{k,c}(g_1)| = |\ker\rho| = \frac{3^t}{|X_{k,c}(g)|}$$

を得る．q_j, $j = 1, \ldots, s$ を g の素因数で，$\chi(q_j) = 0$ を持たすものとする．そのとき，$(q_j, c) = 1$ に注意すれば，$q_j\mathcal{O}_{k,c} = \mathfrak{q}_j^2$ である．任意の $\mathfrak{b} \in \Omega_{k,c}(g)$ は

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \prod_j \mathfrak{q}_j^{c_j}, \quad \mathfrak{b}_1 \in \Omega_{k,c}(g_1),\ c_j = 0, 1$$

とかけるから，

$$|\Omega_{k,c}(g)| = \frac{2^s 3^t}{|X_{k,c}(g)|} = \frac{\prod_{p|g}(2 + \chi(p))}{|X_{k,c}(g)|}.$$

である．よって，(3.13) は，次のように書き直せる．

$$\tilde{h}(27n) = \sum_{cf=m} \sum_{g|f} \mu\left(\frac{f}{g}\right) |Cl_{k,c}^{(3)}| \frac{\prod_{p|g}(2 + \chi(p))}{|X_{k,c}(g)|}. \tag{3.14}$$

K を 3 次体，k を 2 次体とし，A を K, $\mathbb{Q} \oplus k$, $\mathbb{Q}^3$ のいずれかとするとき，

$$\eta_A(s) = \sum_{f=1}^{\infty} \frac{a_A(f)}{f^s}$$

とかく．補題 2.1 より，

$$h(-n) = \sum_{cf=m} \sum_{K \in \mathcal{K}_{k,c}} 2a_K(f) + a_{\mathbb{Q}\oplus k}(m). \tag{3.15}$$

ここで，$\mathcal{K}_{k,c}$ は判別式 $D_k c^2$ の 3 次体全体であった．$m = cf$ は平方因数を持たないから，f もそうであり，$(c, f) = 1$ である．特に，素数 $p|f$ は $K \in \mathcal{K}_{k,c}$ において完全分岐しない．$\eta_A(s)$ はオイラー積を持つから，

$$a_A(f) = \prod_{p|f} a_A(p).$$

補題 1.6 より，

$$a_{\mathbb{Q}\oplus k}(p) = 2 + \chi(p),$$

$$a_K(p) = \begin{cases} 1, & p = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \quad \chi(p) = -1, \\ 2, & p = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^2, \quad \chi(p) = 0, \\ 3, & p = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, \quad \chi(p) = 1, \\ 0, & p = \mathfrak{p}, \quad \chi(p) = 1, \end{cases}$$

したがって，(3.15) は $p|f$, $\chi(p)=1$ が完全分解するような K をわたる和になる．$\mathcal{K}_{k,c}(f)=\{K\in\mathcal{K}_{k,c}|\,p=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\ \forall p|f,\chi(p)=1\}$ であったから，(3.15) は $\ell=3$ に対する (1.2) を用いれば，次のように変形される．

$$\begin{aligned} h(-n) &= \sum_{cf=m}\sum_{K\in\mathcal{K}_{k,c}(f)} 2\prod_{p|f}(2+\chi(p))+\prod_{p|m}(2+\chi(p)) \\ &= \sum_{cf=m} 2|\mathcal{K}_{k,c}(f)|\prod_{p|f}(2+\chi(p))+\prod_{p|m}(2+\chi(p)) \\ &= \sum_{cf=m}\sum_{d|c}\mu\left(\frac{c}{d}\right)\frac{|Cl_{k,d}^{(3)}|}{|X_{k,d}(f)|}\prod_{p|f}(2+\chi(p)). \end{aligned}$$

この右辺は，和の変数を書き直せば，(3.14) の右辺と一致する．以上によって，

命題 3.7. k を虚 2 次体，m を平方因数を持たない自然数として，$n=|D_k|m^2$ とおく．そのとき，$\tilde{h}(27n)=h(-n)$ が成り立つ．

同様にして，

命題 3.8. k を虚 2 次体，m_0 を平方因数を持たない 3 と素な自然数として，$m=9m_0$, $n=|D_k|m^2$ とおく．そのとき，$\tilde{h}(27n)=h(-n)$ が成り立つ．

3.3 一般の場合

$\eta_A(s)$ の $p=3$ におけるオイラー因子を適当に修正することによって得られる $\hat{\eta}_A(s)$ を用いて，ゼータ関数 $\xi_i(\hat{L},s)$, $i=1,2$ に対しても補題 1.5 と同様な表示が得られる．

$$\hat{\eta}_A(s)=\sum_{f=1}^{\infty}\frac{\hat{a}_A(f)}{f^s}$$

とかく．$k\neq\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ならば，

$$\tilde{h}(27n)=\sum_{cf=m'}\sum_{K\in\mathcal{K}_{k',c}} 2\hat{a}_K(f)+\hat{a}_{\mathbb{Q}\oplus k'}(m'). \tag{3.16}$$

ここで，

$$k'=\mathbb{Q}(\sqrt{3n}),\quad m'=\begin{cases} 3m, & 3\nmid D_k, \\ 9m, & 3|D_k \end{cases}\quad (27n=D_{k'}(m')^2)$$

とおいた．

m を任意の自然数とする．$n=|D_k|m^2$, q は m と素な素数とする．

(3.15), (3.16) と補題 1.6 による $a_A(q^N)$ の具体的表示から，二つの数列 $\{\tilde{h}(27nq^{2N})\}_{N\geq0}$ と $\{h(-nq^{2N})\}_{N\geq0}$ は全く同じ漸化式を満たすことがわかる．補題 1.2 より，$q\neq3$

ならば，cを割るqのべきは高々1であることに注意する．そのとき，次の漸化式を得る．$q \neq 3$ならば，

$$h(-nq^{2N}) = \begin{cases} b_3(q^N)h(-n) + b_{1^3}(q^{N-1})h(-nq^2), & q \nmid D_k, \\ \delta_N q^{N/3} h(-n) + b_{1^3}(q^{N-1})h(-nq^2), & q | D_k. \end{cases}$$

ここで，

$$\delta_N = \begin{cases} 1, & 3|N, \\ 0, & 3 \nmid N \end{cases}$$

とおいた．$q = 3$のときは，

$$h(-3^{2N}n) = \delta_N 3^{\frac{N}{3}} h(-n) + \delta_{N-1} 3^{\frac{N-1}{3}} h(-3^2 n) + b_{1^3}(3^{N-2})h(-3^4 n).$$

数列 $\{\tilde{h}(27nq^{2N})\}_{N \geq 0}$ も同じ漸化式を満たすことがわかる．

任意の自然数mに対して，

$$\tilde{h}(27|D_k|m^2) = h(-|D_k|m^2) \tag{3.17}$$

が成り立つことを示そう．$p_1, \ldots, p_t$を相異なる素数とし，$e_1, \ldots, e_t$を任意の自然数とする．あるiについて，$p_i = 3$ならば，$i = 1$としてよい．$m = p_1 \cdots p_t$と$m = p_2 \cdots p_t$に対しては，命題3.7より，(3.17)は成り立つ．もし，$p_1 = 3$ならば，$m = p_1^2 p_2 \cdots p_t$に対しても，命題3.8より，(3.17)は成り立つ．したがって，同じ漸化式を満たすことから，$m = p_1^{e_1} p_2 \cdots p_t$に対しても，(3.17)は成り立つ．同様に，$m = p_1^{e_1} p_3 \cdots p_t$に対しても，(3.17)は成り立つ．同じ漸化式を満たすことから，$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3 \cdots p_t$に対しても，(3.17)は成り立つ．これを繰り返せば，$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}$ に対しても，(3.17)は成り立つ．

参考文献

[1] B. Datskovsky and D. J. Wright, The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms. II: Local theory, J. Reine Angew. Math. **367** (1986), 27–75.

[2] B. N. Delone and D. K. Faddeev, The Theory of Irrationalities of the Third Degree, Amer. Math. Soc. Transl. **10**, 1964.

[3] J. Nakagawa, On the relations among the class numbers of binary cubic forms, Invent. math. **119** (1998), 101–138.

[4] Y. Ohno, A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms, Amer. J. Math. **119** (1997), 1083–1094.

[5] T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 132–188.